

Bestimmung von Wasseroberflächenhöhen aus GNSS-SNR-Daten unter Anwendung der Intervall-Analyse

Jörg Reinking

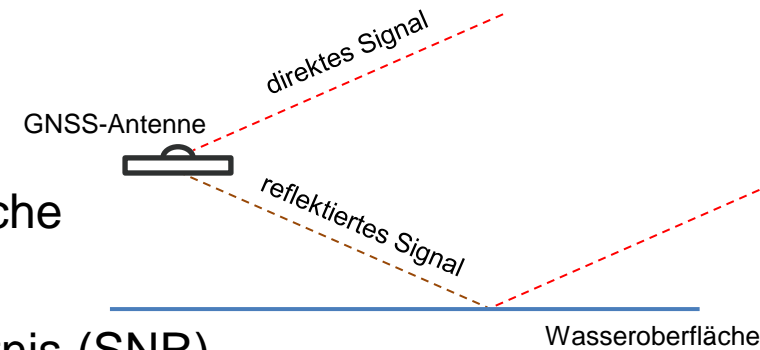
- GNSS-Beobachtungen in mariner Umgebung

- GNSS-Signal reflektiert an Wasseroberfläche

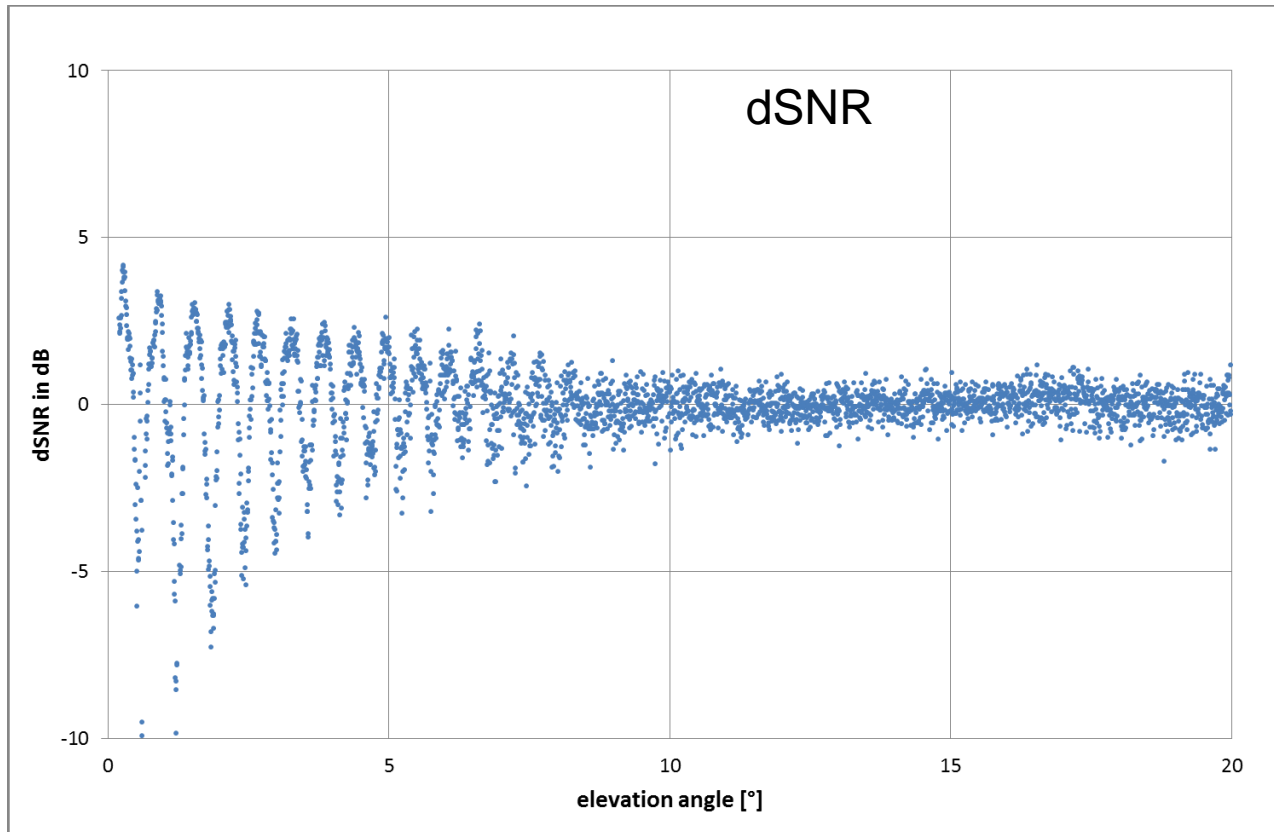
- Interferenz mit direktem Signal
 - beeinflusst Signal-Rausch-Verhältnis (SNR)

- SNR: Funktion der Amplituden A_d und A_r des direkten und reflektierten Signals und dem relativen Phasenwinkel α

$$\text{SNR}(A_d, A_r, \alpha, \dots)$$



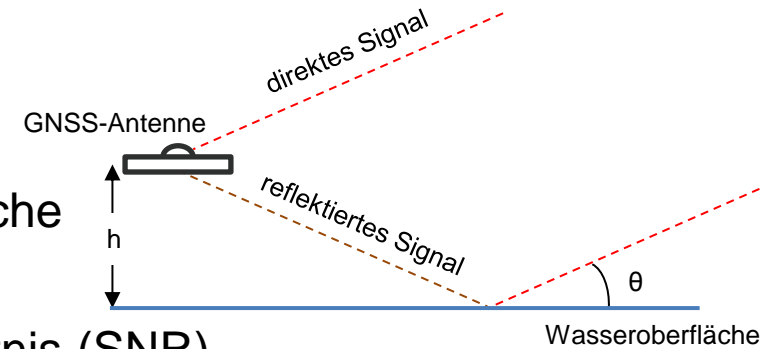
- Beispiel:



- GNSS-Beobachtungen in mariner Umgebung

- GNSS-Signal reflektiert an Wasseroberfläche

- Interferenz mit direktem Signal
 - beeinflusst Signal-Rausch-Verhältnis (SNR)



- SNR: Funktion der Amplituden A_d und A_r des direkten und reflektierten Signals und dem relativen Phasenwinkel α

$$\text{SNR}(A_d, A_r, \alpha, \dots)$$

- Trendreduktion: vereinfachte Form hängt noch vom relativen Phasenwinkel ab

$$d\text{SNR} \approx A \cos(\alpha + \phi) \quad \text{mit Amplitude } A \text{ und Phasen-Offset } \phi$$

- Phasenwinkel: Funktion der Wellenlänge des Signals λ , des Elevationswinkels und der Reflektorhöhe h

$$\alpha = \frac{4\pi}{\lambda} h \sin \theta$$

- SNR: nicht-lineare Funktion der Reflektorhöhe
 - In Tidegewässern: Reflektorhöhe variiert mit der Zeit: $h(t_i)$
 - SNR-Beobachtungen für Satelliten k zum Zeitpunkt t_i wird ausgedrückt durch
$$v_{k,i} + d\text{SNR}_{k,i} = A_k \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda} h(t_i) \sin(\theta_{k,i}) + \phi_k\right)$$
 - A_k , ϕ_k und Parameter von $h(t_i)$ aus Ausgleichung (least-squares)
 - Linearisierung notwendig
 - Gute Näherungswerte für Parameter von $h(t_i)$ notwendig
 - Problem: Was ist gut?
 - Optimierungsproblem:
 - variiere und fixiere Parameter von $h(t_i)$,
 - bestimme A_k , ϕ_k aus Ausgleichung
 - finde kleinste Summe der Quadrate der Residuen (Zielfunktion)

- Beispiel
 - 3 Satelliten mit linear steigendem oder fallendem Elevationswinkel
 - Lineare Funktion für Reflektorhöhe: $h(t_i) = h_0 + h_1 t_i$
 - $h_0 = 5.5 \text{ m}$, $h_1 = 0.333 \text{ m/h}$

$A_k = 1$, $\phi_k = 0$, $\lambda = 19 \text{ cm}$

$t_i = 1 \dots 3600 \text{ s}$

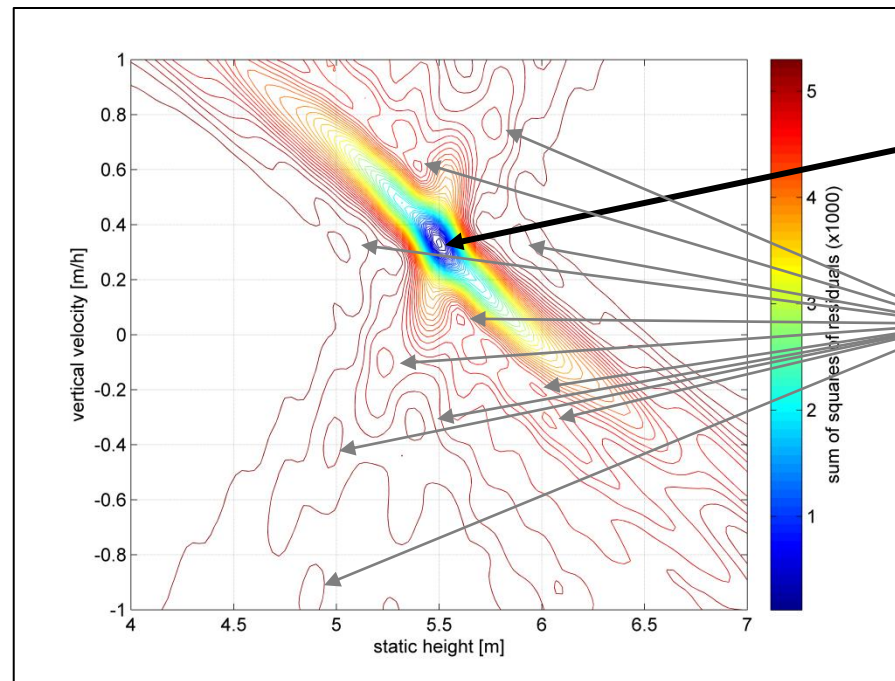
k	$e_{k,1}$	$e_{k,3600}$
1	35°	5°
2	4°	30°
3	6°	23°

EINLEITUNG

- Beispiel
 - 3 Satelliten mit linear steigendem oder fallendem Elevationswinkel
 - Lineare Funktion für Reflektorhöhe: $h(t_i) = h_0 + h_1 t_i$
 - $h_0 = 5.5 \text{ m}$, $h_1 = 0.333 \text{ m/h}$

$A_k = 1$, $\phi_k = 0$, $\lambda = 19 \text{ cm}$
 $t_i = 1 \dots 3600 \text{ s}$

k	$e_{k,1}$	$e_{k,3600}$
1	35°	5°
2	4°	30°
3	6°	23°



Globales Minimum bei
 $h_0 = 5.5 \text{ m}$ und $h_1 = 0.33 \text{ m/h}$

...aber viele zusätzliche
 lokale Minima

- Beispiel
 - 3 Satelliten mit linear steigendem oder fallendem Elevationswinkel
 - Lineare Funktion für Reflektorhöhe: $h(t_i) = h_0 + h_1 t_i$
 - $h_0 = 5.5 \text{ m}$, $h_1 = 0.333 \text{ m/h}$
- Linearisierte Ausgleichung
 - könnte nicht konvergieren
 - könnte zu lokalem Minimum konvergieren
- Brute-Force-Methode (probieren aller Möglichkeiten)
 - 60.000 Berechnungen der Zielfunktion bei Auflösung von 1 cm bzw. 1 cm/h



Globale Optimierung mittels Intervall-Analyse

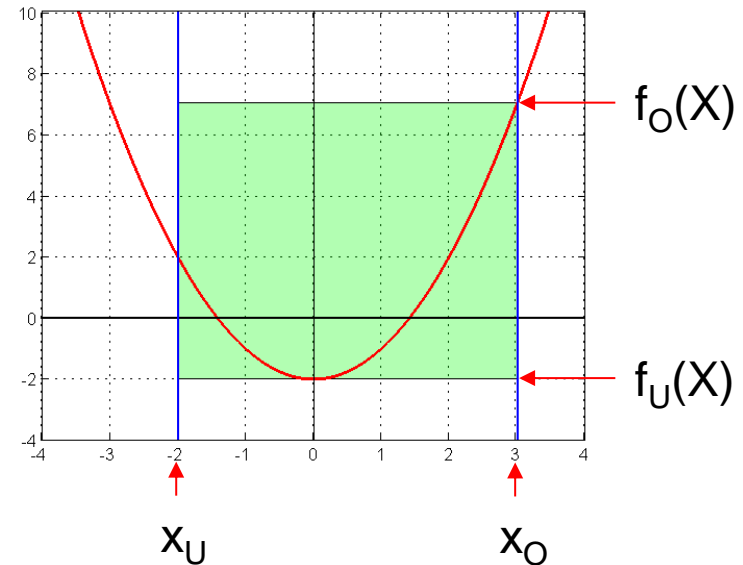
- Intervall-Analyse
 - Nutzt Eigenschaften einer m-dimensionalen Funktion in einer Intervall-Box der Variablen der Funktion
 - Intervall der Funktionswerte wird mit Intervall-Arithmetik bestimmt
 - Algorithmen basieren meist auf “branch-and-bound”-Strategien
 - Start: Fülle Liste der Intervalle mit initialer Intervall-Box
 - Wähle zu untersuchende Intervall-Box
 - Monotonitätstest: Intervall verwerfen?
 - Cut-Off Test: Intervall verwerfen?
 - “bounding”: neues Intervall aus Intervall-Newton-Methode
 - Intervall kleiner: ersetze aktuelles Intervall durch neue Intervalle
 - Intervall nicht kleiner: Intervall teilen, zur Liste der Intervalle zufügen
 - Stopp: wenn Liste leer oder letztes Intervall kleiner als eine Grenzwert
 - Zurück zum zweiten Schritt

Globale Optimierung

- Intervall-Arithmetik
 Intervall: $X = [x_U, x_O]$
 Untere und obere Endpunkte x_U und x_O
- grundlegende Operationen:
 $X = [x_U, x_O] \quad Y = [y_U, y_O]$
 $X \circ Y = [\min\{x_U \circ y_U, x_U \circ y_O, x_O \circ y_U, x_O \circ y_O\}, \max\{x_U \circ y_U, x_U \circ y_O, x_O \circ y_U, x_O \circ y_O\}]$
- daraus: Intervall der Funktionswerte

Beispiel: $f(x) = x^2 - 2$

$X = [-2, 3] \rightarrow f(X) = [-2, 7]$



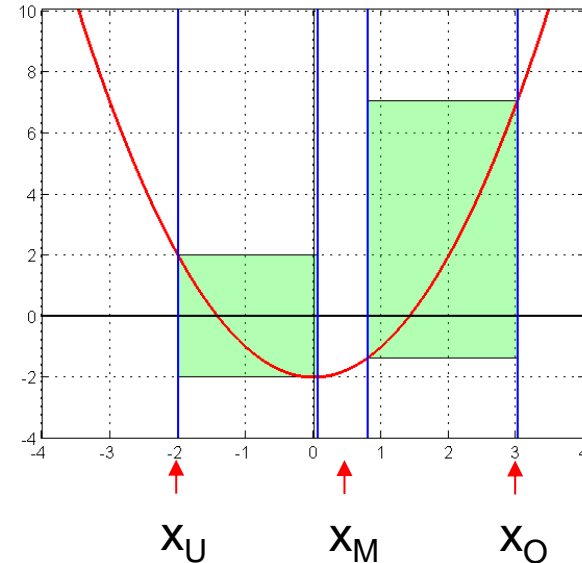
Globale Optimierung

- Intervall-Newton-Methode
 - Intervall-Version der Newton-Methode
 - Findet alle Nullstellen einer Funktion in einem Intervall

$$X_{\text{neu}} = X \cap \left(x_M - \frac{f(x_M)}{f'(X)} \right)$$

Mittelpunkt des Intervalls

min. und max. Gradient im Intervall



- neues X kann ein, zwei oder ein leeres Intervall sein

Beispiel: $f(x) = x^2 - 2$ $f'(X) = [-4, 6]$

$$x_M - \frac{f(x_M)}{f'(X)} = [-\infty, 0.0625] \cup [0.791\bar{6}, \infty]$$

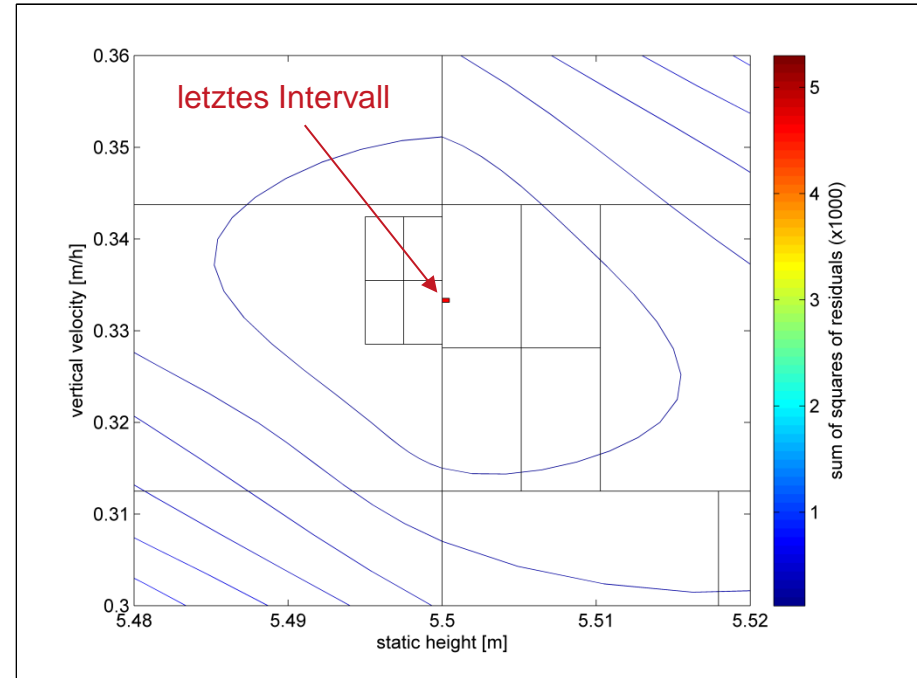
$$x_{\text{neu}} = [-2, 0.0625] \cup [0.791\bar{6}, 3]$$

- Anwenden auf Eingangsbeispiel

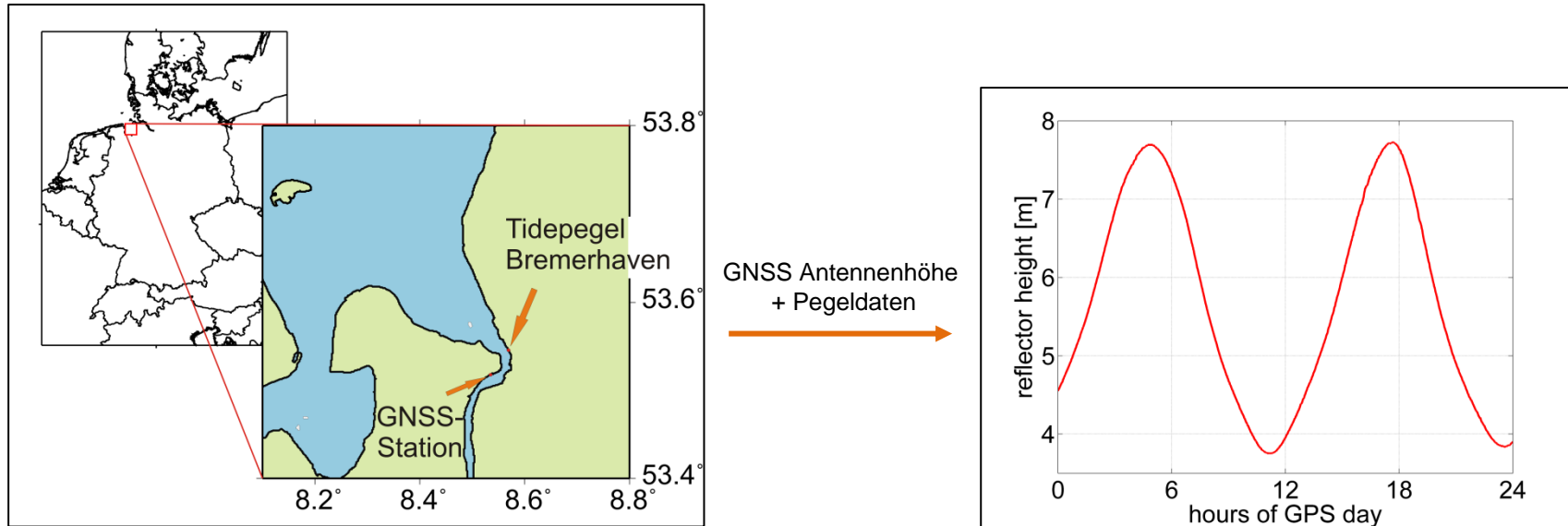
- Auflösung 1 cm bzw. 1 cm/h
- 194 Intervalle untersucht
- Letztes Intervall:
 $h_0 = 5.5 \text{ m}, h_1 = 0.333 \text{ m/h}$

- Verworfenne Intervalle

- Cut-Off-Test 89.7 %
- Monotonitätstest 6.7 %
- leeres Intervall aus Intervall-Newton-Method 3.5 %



- Numerische Evaluation: Weser



Vermeidung von Artefakten aus Vorverarbeitung:
Nutzung von simulierten, aber realitätsnahen Daten

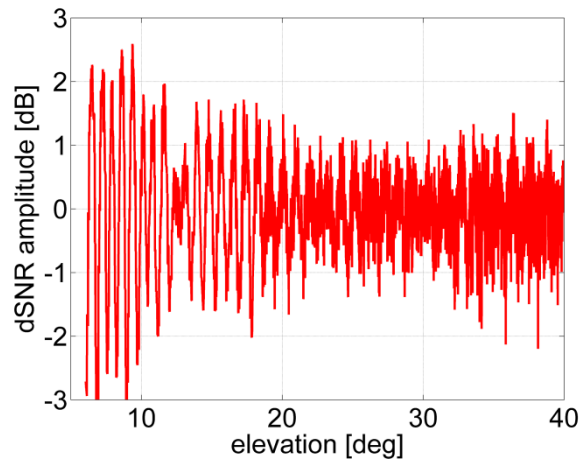
- Numerische Evaluation: Weser

- Daten entsprechend Antennenumgebung maskiert
- Dämpfung bei steigendem Elevationswinkel $A(\theta) = A_{\max} \cos(\theta)e^{-4\theta}$
- Max. Amplitude $A_{\max} = 3$ dB

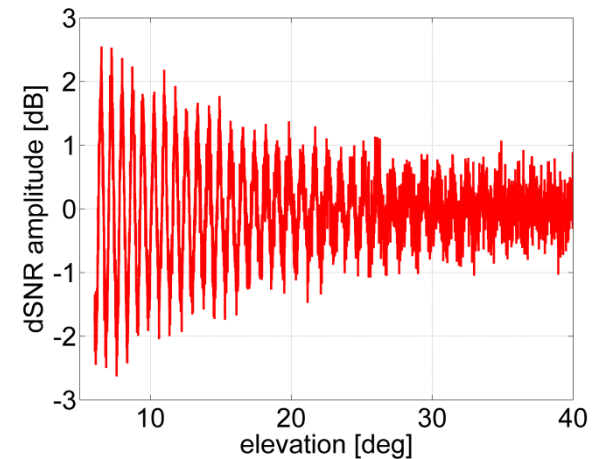
- Zufälliges Rauschen mit $\sigma = 0.3$ dB

- Vereinfachte Version $dSNR_{k,j} = A(\theta_{k,i}) \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda} h(t_i) \sin(\theta_{k,i}) + \phi_k\right) + \text{noise}$

- Beispiel: GPS satellite 1



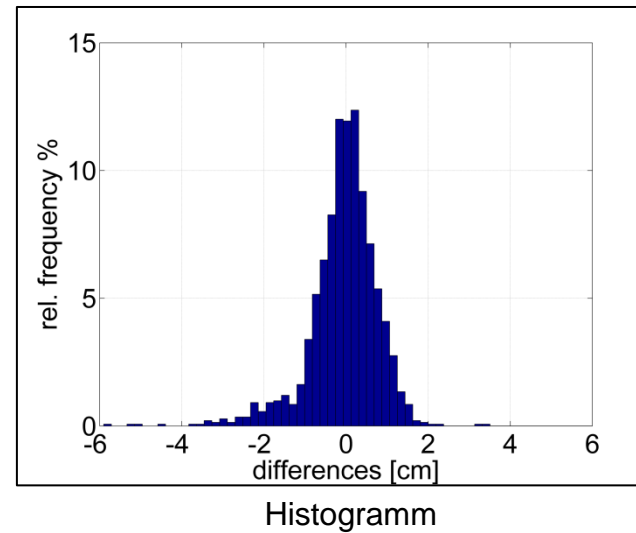
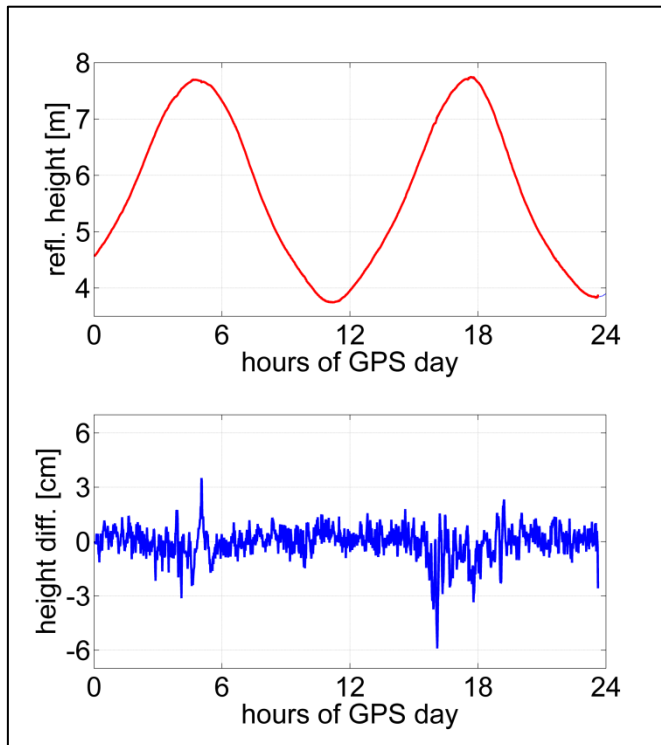
Original-Daten dSNR



Simulierte Daten dSNR

Globale Optimierung

- Numerische Evaluation: Weser
 - Prozessierung: gleitende 20-min-Fenster, verschoben um jeweils 1 min
 - Reflektorhöhe als linear im Zeitfenster angenommen $h(t_i) = h_0 + h_1 t_i$
 - initiale Intervall-Box für alle Fenster: $h_0 = [3.5, 8.0]$ m; $h_1 = [-1.3, +1.3]$ m/h



emp. Standardabweichung 8.5 mm

- Fazit

- Globale Optimierung mit Intervall-Analyse ist anwendbar
- Ergebnisse sind vielversprechend, Methode muss und wird mit realen Daten getestet werden
- Physikalisch korrekte Höhenmodelle können verwendet werden
- Verbesserte und angepasste Optimierungs-Algorithmen müssen entwickelt werden

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit